TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG TRÒN - ĐƯỜNG THẲNG

Giáo viên: Nguyễn Thanh Tùng

I. BÀI TOÁN

1. Nội dung

Cho đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Viết phương trình đường thẳng AB.

2. Cách giải chung

Cách 1: Tọa độ A, B là nghiệm của hệ $\begin{cases}(C_1)\\(C_1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A\\B\end{cases} \Rightarrow$ Phương trình AB.

Cách 2: Giả sử $(C_1): x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$ và $(C_2): x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0\\x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases} \Rightarrow (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0$$

Suy ra phương trình $AB: (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0$

Chú ý:

+) *Ở **cách giải 2** có một ưu điểm hơn so với **cách giải 1** là ta không cần biết tọa độ điểm A, B song hoàn toàn viết được phương trình AB. Trong khi đó ở **cách 1** để viết phương trình AB ta cần tìm được cụ thể tọa độ hai điểm A, B.*

+) ***Cách 1*** *sẽ phù hợp cho những bài toán cần tìm cụ thể tọa độ giao điểm hai đường tròn tường minh. Còn **cách 2** sẽ thích hợp cho những bài toán chứa tham số (ít nhất một trong hai phương trình đường tròn chưa tường minh).*

+) *Đường thẳng AB chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.*

3. Ví dụ gốc

Cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2+4x+4y-17=0$ và $(C_2): x^2+y^2-8x-2y+7=0$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Viết phương trình đường thẳng AB.

Giải:

Cách 1: Tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x^2+y^2+4x+4y-17=0\\x^2+y^2-8x-2y+7=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1; y=2\\x=3; y=-2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}A(1;2), B(3;-2)\\A(3;-2), B(1;2)\end{array}\right.$$

Suy ra phương trình đường thẳng $AB: 2x+y-4=0$

Cách 2: Tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

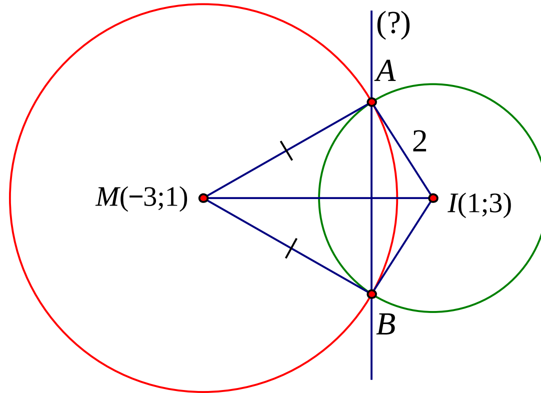
$$\begin{cases}x^2+y^2+4x+4y-17=0\\x^2+y^2-8x-2y+7=0\end{cases} \Rightarrow 12x+6y-24=0 \Leftrightarrow 2x+y-4=0$$

Vậy phương trình đường thẳng $AB: 2x+y-4=0$.

II. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1 (Khối B – 2006). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(-3;1)$. Gọi A và B là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng AB.

Giải:



+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R = IA = 2$

Ta có $MI = 2\sqrt{5}$, khi đó: $MB = MA = \sqrt{MI^2 - IA^2} = \sqrt{20-4} = 4$

+) Suy ra A, B nằm trên đường tròn tâm $M(-3;1)$ bán kính bằng 4, có phương trình:

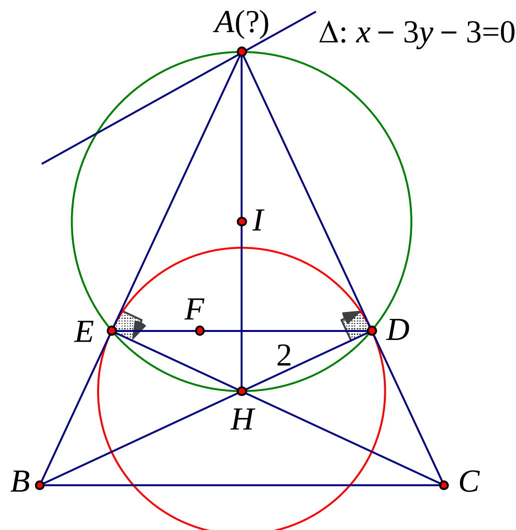
$$(x+3)^2+(y-1)^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+6x-2y-6=0$$

+) Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y-6=0 \\ x^2+y^2-2x-6y+6=0 \end{cases} \Rightarrow 8x+4y-12=0 \Leftrightarrow 2x+y-3=0$

+) Vậy phương trình đường thẳng AB là: $2x+y-3=0$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, có trực tâm $H(-3;2)$. Gọi D, E là chân đường cao kẻ từ B và C. Biết rằng điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: x-3y-3=0$, điểm $F(-2;3)$ thuộc đường thẳng DE và $HD = 2$. Tìm tọa độ điểm A.

Giải:



+) Do ABC cân tại A nên $HE = HD = 2$, suy ra E, D thuộc đường tròn tâm $H(-3;2)$ và bán kính bằng 2 có phương trình: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

+) Gọi I là trung điểm của AH

Gọi $A(3m+3;m) \in \Delta \Rightarrow I\left(\dfrac{3m}{2};\dfrac{m+2}{2}\right) \Rightarrow IH^2 = \dfrac{5m^2+16m+20}{2}$

Ta có $ADHE$ nội tiếp đường tròn tâm $I\left(\dfrac{3m}{2};\dfrac{m+2}{2}\right)$ bán kính IH nên có phương trình:

$$\left(x-\frac{3m}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{m+2}{2}\right)^2 = \frac{5m^2+16m+20}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3mx - (m+2)y - 7m - 9 = 0$$

+) Khi đó tọa độ điểm E, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3mx - (m+2)y - 7m - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow (6+3m)x + (m-2)y + 7m + 18 = 0$$

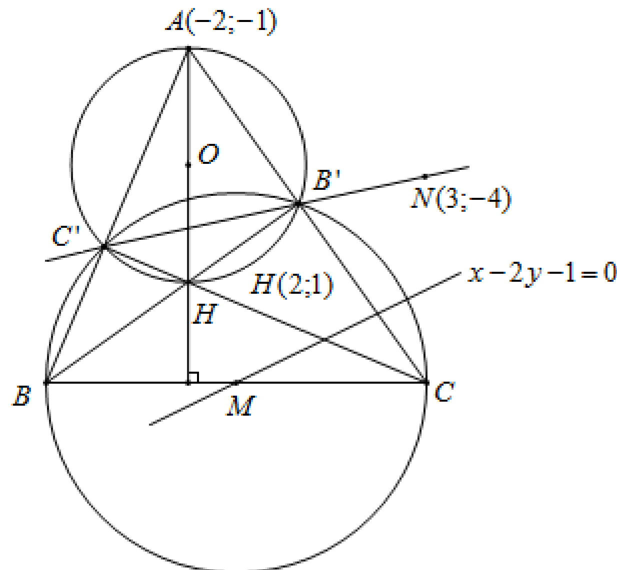
Suy ra phương trình $ED: (6+3m)x + (m-2)y + 7m + 18 = 0$

+) Do $F(-2;3) \in ED \Rightarrow -2(6+3m) + 3(m-2) + 7m + 18 = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow A(3;0)$

Vậy $A(3;0)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, trực tâm $H(2;1)$ và $BC = 2\sqrt{5}$. Gọi B', C' lần lượt là chân đường cao kẻ từ các đỉnh B, C. Lập phương trình đường thẳng BC, biết rằng trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 2y - 1 = 0$, tung độ của M dương và đường thẳng $B'C'$ đi qua điểm $N(3;-4)$

Giải:



+) Do M nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 2y - 1 = 0$ nên gọi $M(2m+1;m)$ với $m > 0$

Vì B', C' cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên $BCB'C'$ nội tiếp đường tròn $(M;MB)$

(với $MB = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{5}$)

Do đó đường tròn (T) đi qua 4 điểm B,C,B',C' có phương trình: $\left(x-2m-1\right)^2+\left(y-m\right)^2=5$

+) Đường tròn (T') đi qua 4 điểm A,B',H,C' nhận AH làm đường kính và $O(0;0)$ là trung điểm của AH làm tâm nên có phương trình: $x^2+y^2=5$

+) Do $(T)\cap(T')=\{B';C'\}$ nên $B'C'$ có phương trình: $x^2+y^2-\left(x-2m-1\right)^2-\left(y-m\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow 2(2m+1)x+2my-5m^2-4m-1=0$$

Mặt khác $N(-3;4)\in B'C'\Rightarrow 6(2m+1)-8m-5m^2-4m-1=0\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-1$ (loại)

Suy ra $M(3;1)$

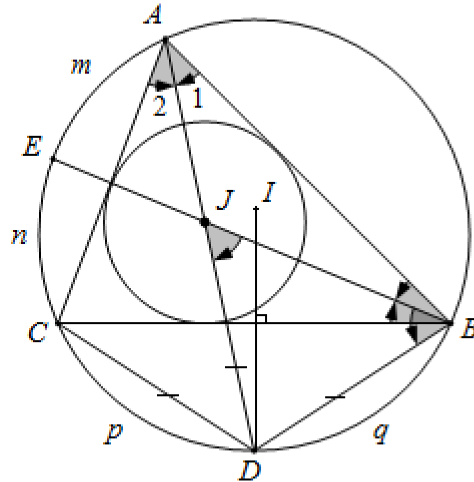
+) Khi đó đường thẳng BC đi qua $M(3;1)$ và nhận $\overrightarrow{AH}=(4;2)=2(2;1)$

làm vecto pháp tuyến nên có phương trình: $2(x-3)+(y-1)=0\Leftrightarrow 2x+y-7=0$.

Vậy phương trình đường thẳng BC là: $2x+y-7=0$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(6;6)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $J(4;5)$. Biết điểm $A(2;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC.

Giải:



+) Đường tròn ngoại tiếp ABC có tâm $I(6;6)$ và bán kính $IA=5$ nên có phương trình:

$$(x-6)^2+(y-6)^2=25$$

Ta có AD đi qua $A(2;3),J(4;5)$ nên có phương trình : $x-y+1=0$

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ : $\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=25\\ x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x=9\\ y=10\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}D(2;3)\equiv A\\ D(9;10)\end{array}\right.\Rightarrow D(9;10)$

+) Gọi E là giao điểm thứ hai của BJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó:

$\begin{cases}\overset{\frown}{AmE}=\overset{\frown}{EnC}\\ \overset{\frown}{CpD}=\overset{\frown}{DqB}\end{cases}$ (góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau)

$\Rightarrow \overset{\frown}{EnC}+\overset{\frown}{CpD}=\overset{\frown}{AmE}+\overset{\frown}{DqB}$ hay $\overset{\frown}{ECD}=\overset{\frown}{AmE}+\overset{\frown}{DqB}$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} \widehat{EBD} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{ECD} \\ \widehat{DJB} = \frac{1}{2}\left(sd\,\widehat{AmE} + sd\,\widehat{DqB}\right) \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EBD} = \widehat{DJB}$ hay tam giác DBJ cân tại D, suy ra $DB = DJ$ (*)

Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow DB = DC$ (2*)

Từ (*) & (2*) suy ra: $DB = DJ = DC$ hay D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC

Suy ra B, C nằm trên đường tròn tâm $D(9;10)$ bán kính $DJ = 5\sqrt{2}$

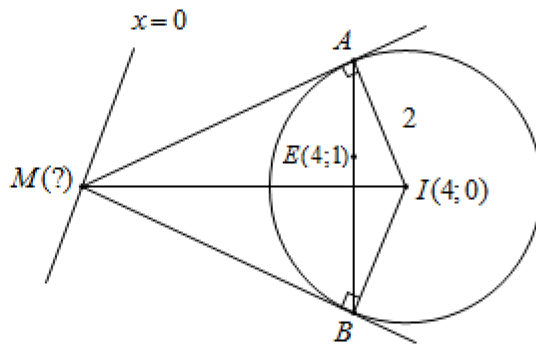
có phương trình : $(x-9)^2 + (y-10)^2 = 50$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ : $\begin{cases} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ (x-9)^2 + (y-10)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(2;9), C(10;3) \\ B(10;3), C(2;9) \end{array}\right.$

Vậy $B(2;9), C(10;3)$ hoặc $B(10;3), C(2;9)$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-4)^2 + y^2 = 4$ và điểm $E(4;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục tung, sao cho từ điểm M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho AB đi qua E .

Giải:



+) Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$ và bán kính $R = 2$

+) Gọi $M(0;m) \in Oy \Rightarrow IM^2 = m^2 + 16 \Rightarrow MA^2 = MB^2 = MI^2 - R^2 = m^2 + 12$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm M bán kính MA có phương trình: $x^2 + (y-m)^2 = m^2 + 12$

+) Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + (y-m)^2 = m^2 + 12 \\ (x-4)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2my - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - my - 12 = 0$$

Suy ra phương trình $AB: 4x - my - 12 = 0$

+) Mặt khác $E(4;1) \in AB \Rightarrow 16 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow M(0;4)$. Vậy $M(0;4)$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$ với tâm I và điểm $A(4;5)$. Từ A kẻ một đường thẳng cắt đường tròn (T) tại hai điểm B, C, tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với IA, cắt (T) tại E, F. Xác định tọa độ các điểm E, F .

Giải:

+) Gọi $K(a;b)$ khi đó $M\left(\frac{a+1}{2};\frac{b+1}{2}\right)$ là trung điểm của IK

Do $IBKC$ nội tiếp đường tròn tâm M bán kính $MI=\frac{\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}}{2}$

nên B,C thuộc đường tròn có phương trình:

$$\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+1}{2}\right)^2=\frac{(a-1)^2+(b-1)^2}{4}\Leftrightarrow x^2+y^2-(a+1)x-(b+1)y+a+b=0$$

+) Do B,C thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=5\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0$

Khi đó tọa độ B,C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x^2+y^2-(a+1)x-(b+1)y+a+b=0\\x^2+y^2-2x-2y-3=0\end{cases}\Rightarrow (a-1)x+(b-1)y-a-b-3=0$$

Suy ra phương trình đường thẳng $BC:(a-1)x+(b-1)y-a-b-3=0$

+) Do $A\in BC\Rightarrow 4(a-1)+5(b-1)-a-b-3=0\Leftrightarrow 3a+4b=12$

+) $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{IA}=(3;4)$ và EF đi qua $K(a;b)$ nên có phương trình:

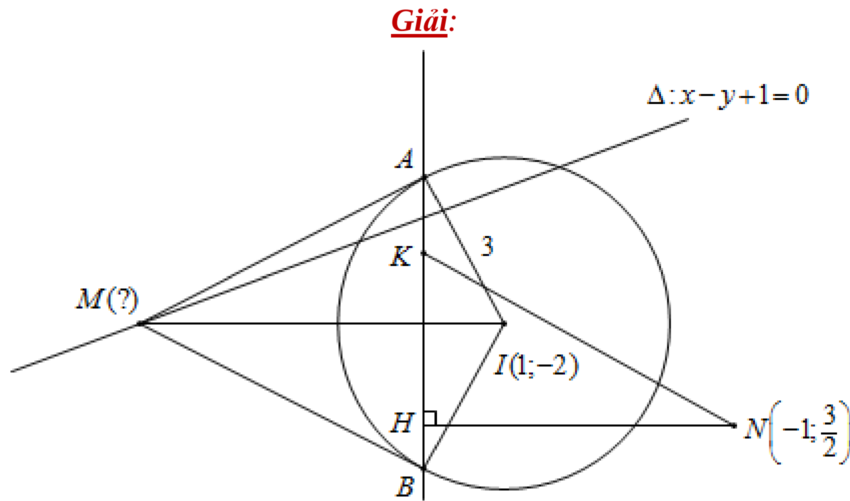
$$3(x-a)+4(y-b)=0\Leftrightarrow 3x+4y-(3a+4b)=0\Leftrightarrow 3x+4y-12=0$$

Khi đó tọa độ điểm E,F là nghiệm của hệ: $\begin{cases}3x+4y-12=0\\(x-1)^2+(y-1)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;y=3\\x=\frac{16}{5};y=\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Vậy $E\left(\frac{16}{5};\frac{3}{5}\right),F(0;3)$ hoặc $E(0;3),F\left(\frac{16}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và đường thẳng $\Delta:x-y+1=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến MA,MB đến đường tròn (C) (với A,B là các tiếp điểm), đồng thời khoảng cách từ điểm $N\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ đến AB lớn nhất.

Giải:



+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = IA = 3$. Gọi $M(m;m+1) \in \Delta$.

Để từ M kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) thì :

$$MI > R \Leftrightarrow \sqrt{(m-1)^2+(m+3)^2} > 3 \Leftrightarrow 2m^2+4m+1>0 \ (*)$$

+) Ta có $MB = MA = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{2m^2+4m+1}$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm $M(m;m+1)$ bán kính bằng $\sqrt{2m^2+4m+1}$ có phương trình:

$$(x-m)^2+(y-m-1)^2 = 2m^2+4m+1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2mx-2(m+1)y-2m=0$$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2mx-2(m+1)y-2m=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-4=0 \end{cases} \Rightarrow (m-1)x+(m+3)y+m-2=0$$

Suy ra phương trình $AB: (m-1)x+(m+3)y+m-2=0$

+) Gọi $K(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà AB luôn đi qua, khi đó :

$(m-1)x_0+(m+3)y_0+m-2=0$ luôn đúng $\forall m$

$\Leftrightarrow (x_0+y_0+1)m = x_0-3y_0+2$ luôn đúng $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+y_0+1=0 \\ x_0-3y_0+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{5}{4} \\ y_0 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$$

+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên AB, khi đó: $d(N,AB) = NH \le NK = \dfrac{\sqrt{26}}{4}$

Suy ra $d(N,AB)_{max} = \dfrac{\sqrt{26}}{4}$ khi $H \equiv K$ hay $NK \perp AB$ (2*)

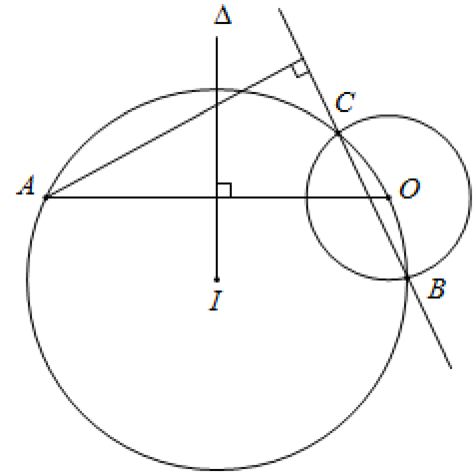
Mà ta có: $\overrightarrow{NK} = \left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{4}(1;5)$ và $\overrightarrow{u_{AB}} = (m+3;1-m)$

Suy ra (2*) $\Leftrightarrow m+3+5(1-m)=0 \Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn (*))

Vậy $M(2;3)$.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T'): x^2 + y^2 = 1$ và điểm $A(1;3)$. Viết phương trình đường tròn (T) qua A và tâm của đường tròn (T'), đồng thời cắt đường tròn (T') tại hai điểm B, C sao cho khoảng cách tư điểm A đến đường thẳng BC là lớn nhất.

Giải:



+) Gọi I là tâm và R là bán kính của đường tròn (T), khi đó:

$$R = IO = IA$$

Suy ra I thuộc đường trung trực của OA có phương trình

$$\Delta: x + 3y - 5 = 0$$

+) Khi đó $I(5-3m; m) \in \Delta$ và bán kính: $R = OI = \sqrt{10m^2 - 30m + 25}$

Suy ra phương trình đường tròn (T):

$$(x + 3m - 5)^2 + (y - m)^2 = 10m^2 - 30m + 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(3m-5)x - 2my = 0$$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(3m-5)x - 2my = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2(3m-5)x - 2my + 1 = 0$$

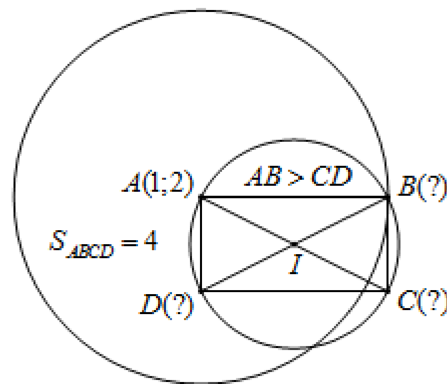
Suy ra phương trình $BC: 2(3m-5)x - 2my + 1 = 0$

+) Ta có $d(A, BC) = \dfrac{9}{\sqrt{4(3m-5)^2 + 4m^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{40\left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 10}} \le \dfrac{9}{\sqrt{10}}$

Dấu "=" xảy ra khi $m = \dfrac{3}{2}$ hay phương trình đường tròn $(T): x^2 + y^2 - x - 3y = 0$.

Ví dụ 9. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$ và điểm $A(1;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp (C) và có diện tích bằng 4. Biết AB là chiều dài của hình chữ nhật và B có hoành độ nguyên

Giải:



+) Đường tròn (C) có tâm $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Khi đó I là trung điểm của $AC \Rightarrow C(2;5)$

+) Đặt $\begin{cases} AB = a \\ AD = b \end{cases}$ (với $a > b > 0$) khi đó :

$$\begin{cases} S_{ABCD} = 4 \\ AB^2 + AD^2 = BD^2 = 4R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (loại)}$$

+) Vậy $AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $A(1;2)$ bán kính $R' = 2\sqrt{2}$ có phương trình:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

+) Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

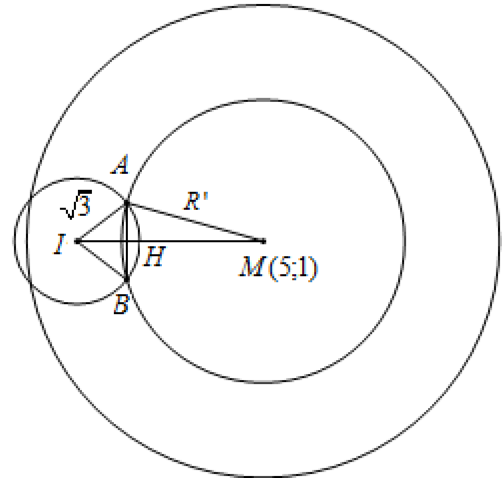
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - 3y \\ 5y^2 - 44y + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{24}{5} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$\Rightarrow B(3;4) \Rightarrow D(0;3)$ (vì I là trung điểm của BD). Vậy $B(3;4), C(2,5)$ và $D(0;3)$.

Ví dụ 10. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Giải:

+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$



Cách 1:

+) Gọi (C') có bán kính R', khi đó (C') có phương trình:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = R'^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 2y + 16 - R'^2 = 0$$

Suy ra phương trình AB có dạng: $8x + 6y + R'^2 - 24 = 0$

+) Ta có $AB = \sqrt{3} \Rightarrow \Delta IAB$ đều $\Rightarrow d(I, AB) = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|8 - 12 + R'^2 - 24|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |R'^2 - 28| = 15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R'^2 = 43 \\ R'^2 = 13 \end{array}\right.$$

+) Vậy đường tròn (C') cần lập là :

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43 \text{ hoặc } (x-5)^2 + (y-1)^2 = 13.$$

Cách 2:

+) Gọi (C') có bán kính R' . Ta có $MI = 5$

Gọi $IM \cap AB = \{H\} \Rightarrow AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{3 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{3}{2}$

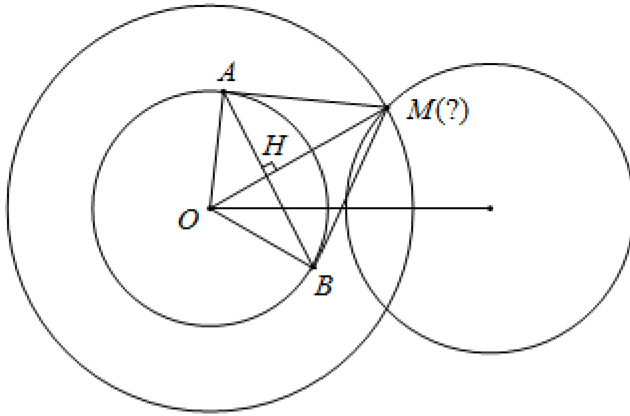
+) Khi đó $MH = MI - IH = 5 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$ hoặc $MH = MI + IH = 5 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{13}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} R' = MA = \sqrt{\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13} \\ R' = MA = \sqrt{\left(\dfrac{13}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{43} \end{array}\right.$$

+) Vậy đường tròn (C') cần lập là : $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$ hoặc $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$.

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-18x-6y+65=0$ và $(C_2): x^2+y^2=9$. Từ điểm M thuộc đường tròn (C_1) kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (C_2) với hai tiếp điểm A, B. Tìm tọa độ điểm M, biết độ dài đoạn $AB=4,8$.

Giải:



+) Đường tròn (C_2) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=OA=3$

Gọi H là giao điểm của OH và AB, suy ra $AH=\frac{AB}{2}=\frac{4,8}{2}=\frac{12}{5}$

Suy ra $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\frac{9}{5}\Rightarrow OM=\frac{OA^2}{OH}=5$

+) Vậy M nằm trên đường tròn tâm O bán kính bằng 5 có phương trình: $x^2+y^2=25$

+) Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x^2+y^2-18x-6y+65=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\\3x+y-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\\\begin{cases}x=5\\y=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(4;3)\\M(5;0)\end{array}\right.$$

Vậy $M(4;3)$ hoặc $M(5;0)$.

Ví dụ 12. Cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và điểm $K(3;4)$. Lập phương trình đường tròn (T) tâm K cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất với I là tâm của đường tròn (C).

Giải:

+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=2$

+) Ta có: $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{R^2}{2}\sin\widehat{AIB}\le\frac{R^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^0$

Vậy $S_{IAB\max}=\frac{R^2}{2}$ khi ΔIAB vuông tại $I\Rightarrow AB=R\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

+) Khi đó bài toán tương tự như **Ví dụ 10** nên ta có đáp số

Đường tròn (T) cần lập là : $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ hoặc $(x-3)^2+(y-4)^2=20$.

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-3=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm $K(1;3)$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 4, với I là tâm của đường tròn (C).

Giải:

+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$

+) Gọi $IM \cap AB = \{H\}$ và đặt $AH = a$, khi đó : $S_{IAB} = \dfrac{IH.AB}{2} = \sqrt{R^2-AH^2}.AH = \sqrt{8-a^2}.a = 4$

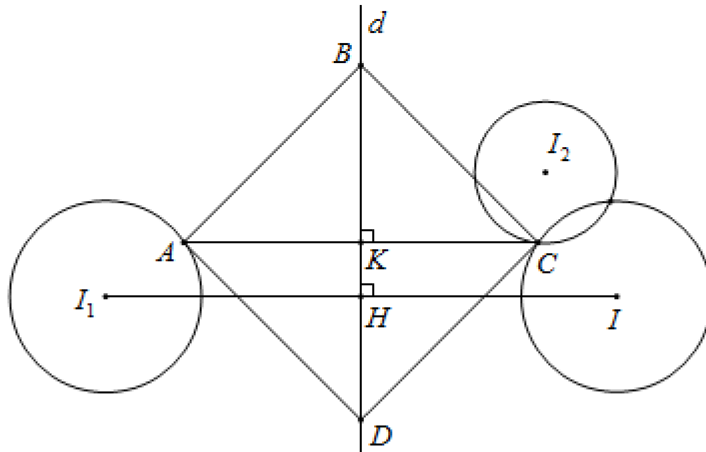
$$\Leftrightarrow a^2(8-a^2)=16 \Leftrightarrow (a^2-4)^2=0 \Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=2 \Rightarrow AH=2 \Leftrightarrow AB=4$$

+) Khi đó bài toán tương tự như **Ví dụ 10** nên ta có đáp số

Đường tròn (C) cần lập là : $(x-1)^2+(y-3)^2=13$ hoặc $(x-1)^2+(y-3)^2=53$.

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=9$ và $(C_2):(x+2)^2+(y-10)^2=4$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết điểm A thuộc (C_1), điểm C có tọa độ nguyên thuộc (C_2) và các đỉnh B, D thuộc đường thẳng $x-y+6=0$.

Giải:



+) Gọi (T) là đường tròn đối xứng với (C_1) qua đường thẳng d

Khi đó tâm I của (T) đối xứng với tâm $I_1(1;2)$ qua đường thẳng d và có bán kính $R=R_1=3$

+) Đường thẳng II_1 có phương trình: $x+y-3=0$. Khi đó tọa độ giao điểm H của II_1 và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right) \Rightarrow I(-4;7)$$

+) Khi đó phương trình đường tròn $(T):(x+4)^2+(y-7)^2=9$

Do A, C đối xứng nhau qua d nên $A \in (C_1) \Rightarrow C \in (T)$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x+4)^2+(y-7)^2=9 \\ (x+2)^2+(y-10)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=10 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-\dfrac{16}{13} \\ y=\dfrac{106}{13} \end{cases} \Rightarrow C(-4;10) \text{ hoặc } C\left(-\dfrac{16}{13};\dfrac{106}{13}\right) \text{ (loại)}$$

Do A đối xứng với C qua d nên đường thẳng AC có phương trình: $x+y-6=0$

Khi đó tọa độ giao điểm K của AC và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-6=0 \\ x-y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow K(0;6) \Rightarrow A(4;2)$$

+) Đường tròn tâm K ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có bán kính $KA=4\sqrt{2}$

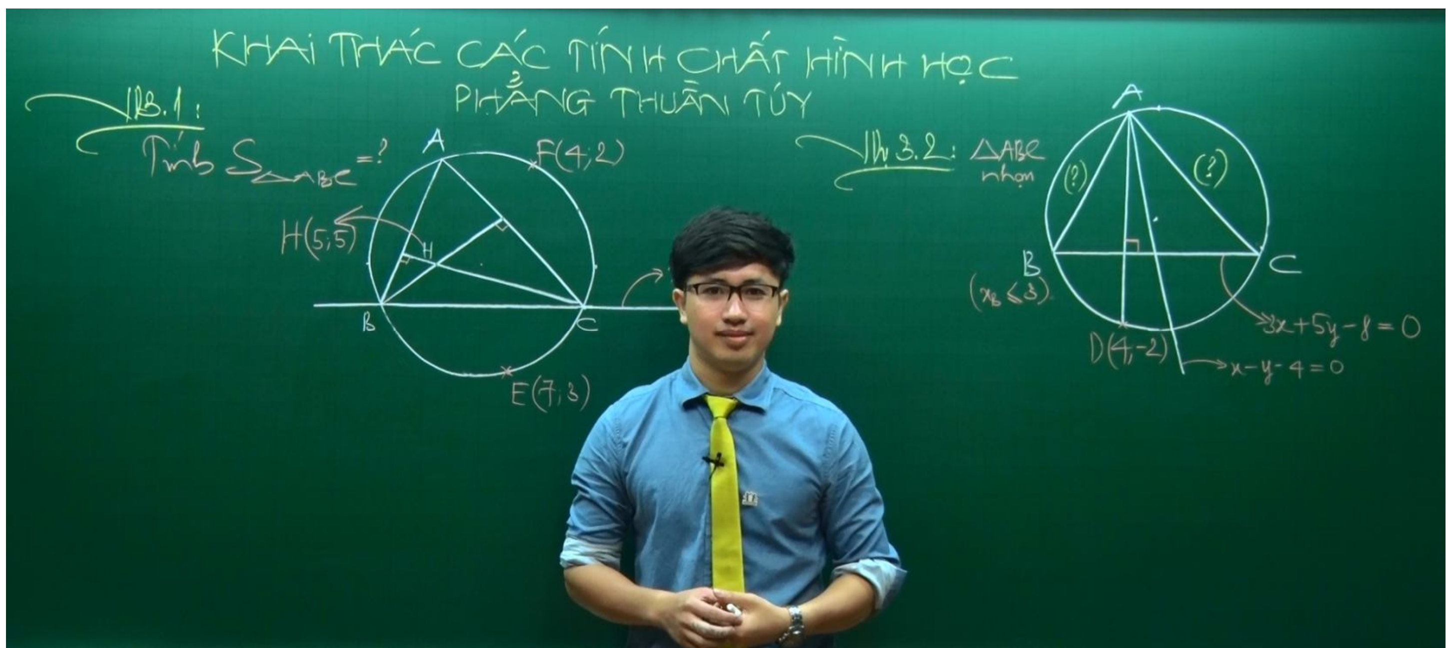
có phương trình: $x^2+(y-6)^2=32$

Khi đó tọa độ điểm B,D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2+(y-6)^2=32 \\ x-y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=4 \\ y=10 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-4;2), D(4;10) \\ B(4;10), D(-4;2) \end{array} \right.$$

Vậy $A(4;2), B(-4;2), C(-4;10), D(4;10)$ hoặc $A(4;2), B(4;10), C(-4;10), D(-4;2)$.

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ ĐỌC TÀI LIỆU



GV: **Nguyễn Thanh Tùng**